УДК 519.718

С. М. Грабовская

О НАДЕЖНОСТИ НЕВЕТВЯЩИХСЯ ПРОГРАММ В БАЗИСЕ, СОДЕРЖАЩЕМ ФУНКЦИЮ ВИДА $x_1^{a_1} \vee x_2^{a_2}$ [1]

Аннотация. Рассматривается реализация булевых функций неветвящимися программами с оператором условной остановки в полном конечном базисе B, содержащем некоторую функцию вида $x_1^{a_1} \vee x_2^{a_2}, a_1, a_2 \in \{0, 1\}$. Предполагается, что функциональные операторы с вероятностью $\varepsilon\,(\varepsilon \in (0, 1/2))$ подвержены инверсным неисправностям на выходах, а операторы условной остановки абсолютно надежны. Доказано, что любую булеву функцию f можно реализовать неветвящейся программой, функционирующей с ненадежностью не больше $\varepsilon + 81\varepsilon^2$ при $\varepsilon \in (0, 1/960]$.

Ключевые слова: булевы функции, неветвящиеся программы, оператор условной остановки, синтез, надежность.

Abstract. The problem of synthesis of nobranching programs with conditional stop-operator is considered in full finite basis, contained some kind function $x_1^{a_1} \vee x_2^{a_2}, a_1, a_2 \in \{0, 1\}$. All functional operators are supposed to be prone output inverse failures with probability $\varepsilon\,(\varepsilon \in (0, 1/2))$. Conditional stop-operators are absolutely reliable. Any boolean function is proved to be possible to realize by nobranching program, functioned with unreliability no more $\varepsilon + 81\varepsilon^2$ at $\varepsilon \in (0, 1/960]$.

Keywords: boolean functions, nobraching programs, conditional stop-operator, synthesis, reliability.

Введение

Рассматривается реализация булевых функций неветвящимися программами с оператором условной остановки [1] в полном конечном базисе B. Программы с оператором условной остановки характеризуются наличием управляющей команды – команды условной остановки, дающей возможность досрочного прекращения работы при выполнении определенного условия. Сформулируем необходимые понятия и определения (см. работу [1]).

Пусть $X = \{x_1, ..., x_n\}$ – множество независимых булевых переменных, $\tilde{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ – набор независимых переменных, $n \in N$. Введем множества переменных $Y = \{y_1, ..., y_l\}$ и $Z = \{z_1, ..., z_m\}$, $l \in N$, $m \in N$. Переменные из множества Y назовем внутренними, переменные из множества Z – выходными переменными. Пусть далее $a \in Y \bigcup Z$, $b_1, \ldots, b_d \in X \bigcup Y \bigcup Z$, $(d \in \{1, \ldots, n\})$, h – булева функция из базиса B, зависящая не более чем от d переменных. *Вычислительной командой p* назовем выражение $p: a = h(b_1, \ldots, b_d)$. Переменную a назовем *выходом* вычислительной команды, переменные $b_1, ..., b_d$ – *входами* этой команды.

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РГНФ, номер проекта 09-06-28615а/В.

Пусть теперь $a \in X \bigcup Y \bigcup Z$. *Командой остановки p* назовем выражение $p : \mathrm{stop}(a)$. Переменную *a* назовем входом команды остановки *p*.

Последовательность $\mathrm{Pr} = p_1 \ldots p_i \ldots p_L$, состоящая из вычислительных команд и команд остановки, называется *неветвящейся программой с условной остановкой*, если при любом $j \in \{1, 2, \ldots, L\}$ каждый вход команды p_j есть либо независимая переменная, либо выход некоторой вычислительной команды p_i, где $i < j$.

Неветвящаяся программа работает в дискретные моменты времени $t = 0, 1, 2, \ldots$, не изменяет значения независимых переменных и изменяет значения внутренних и выходных переменных. Значения $y_i(\tilde{x}; t)$ внутренних переменных y_i и значения $z_j(\tilde{x}; t)$ выходных переменных z_j программы Pr в произвольный момент времени *t* на наборе независимых переменных $\tilde{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ определим индуктивно следующим образом:

– в начальный момент времени $t = 0$ значения всех внутренних и выходных переменных считаем неопределенными;

– если команда p_t не изменяет значения внутренней переменной y_i (или выходной переменной z_j), то положим

$$y_i(\tilde{x}; t) = y_i(\tilde{x}; t-1), \ z_j(\tilde{x}; t) = z_j(\tilde{x}; t-1);$$

– если команда p_t изменяет значения внутренней переменной y_i (или выходной переменной z_j), и значения 1-го, …, *d*-го входов команды p_t в момент времени $(t-1)$ равны соответственно $b_1(\tilde{x}; t-1), \ldots, b_d(\tilde{x}; t-1)$, то положим

$$y_i(\tilde{x}; t) = h_t(b_1(\tilde{x}; t-1), \ldots, b_d(\tilde{x}; t-1)),$$
$$z_j(\tilde{x}; t) = h_t(b_1(\tilde{x}; t-1), \ldots, b_d(\tilde{x}; t-1)).$$

Значением команды p_t программы Pr на наборе $\tilde{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ независимых переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ назовем значение ее выхода в момент времени *t* и обозначим $p_t(\tilde{x})$.

Через $n(p)$ обозначим номер команды *p* в программе Pr, т.е. $n(p_i) = i$. Пусть $p_{t_1}, \ldots, p_{t_r}$ – все команды остановки из Pr, причем $t_1 < \ldots < t_r$. Тогда через s_j будем обозначать *j*-ю команду остановки программы Pr, т.е. $s_j \equiv p_{t_j}$.

Вычислительную команду p_i (переменную x_l) назовем аргументом команды остановки s_j, $n(s_j) = r$, и обозначим через q_j, если

(i) выход команды p_i (переменная x_l) является входом команды s_j;

(ii) среди команд $p_t, i < t < r,$ нет команды, выход которой совпадает с выходом команды p_i.

Будем говорить, что *k*-я команда остановки s_k прекращает вычисления программы Pr на наборе $\tilde{x}$, если

$$q_1(\tilde{x}) = \ldots = q_{k-1}(\tilde{x}) = 0, \ q_k(\tilde{x}) = 1.$$

Результат действия программы Pr на наборе $\tilde{x}$ обозначим через $\mathrm{Pr}(\tilde{x})$, его l-ю компоненту $\mathrm{Pr}_l(\tilde{x})$ определим следующим образом:

$$\mathrm{Pr}_l(\tilde{x}) = \begin{cases} z_l(\tilde{x}; t_k), \text{ если } q_1(\tilde{x}) = \ldots = q_{k\text{-}1}(\tilde{x}) = 0, \ q_k(\tilde{x}) = 1, \\ z_l(\tilde{x}; L), \text{ если } q_1(\tilde{x}) = \ldots = q_r(\tilde{x}) = 0, \end{cases}$$

т.е. $\mathrm{Pr}_l(\tilde{x})$ равно значению l-й выходной переменной z_l в момент остановки программы. Легко видеть, что

$$Pr_l(\tilde{x}) = q_1(\tilde{x})z_l(\tilde{x}; t_1) \vee \overline{q}_1(\tilde{x})q_2(\tilde{x})z_l(\tilde{x}; t_2) \vee \ldots$$

$$\ldots \vee \overline{q}_1(\tilde{x})\overline{q}_2(\tilde{x}) \cdots \overline{q}_{k-1}(\tilde{x})q_k(\tilde{x})z_l(\tilde{x}; t_k) \vee \ldots$$

$$\ldots \vee \overline{q}_1(\tilde{x})\overline{q}_2(\tilde{x}) \cdots \overline{q}_{r-1}(\tilde{x})q_r(\tilde{x})z_l(\tilde{x}; t_r) \vee \ldots \vee \overline{q}_1(\tilde{x})\overline{q}_2(\tilde{x}) \cdots \overline{q}_r(\tilde{x})z_l(\tilde{x}; L). \quad (1)$$

Иногда формулу (1) удобнее использовать в преобразованном виде:

$$\mathrm{Pr}_l(\tilde{x}) = q_1(\tilde{x})z_l(\tilde{x}; t_1) \vee \overline{q}_1(\tilde{x})(q_2(\tilde{x})z_l(\tilde{x}; t_2) \vee \overline{q}_2(\tilde{x})(\ldots(q_{k-1}(\tilde{x})z_l(\tilde{x}; t_{k-1}) \vee$$

$$\vee \overline{q}_{k-1}(\tilde{x})(\ldots \vee \overline{q}_{r-1}(\tilde{x})(q_r(\tilde{x})z_l(\tilde{x}; t_r) \vee \overline{q}_r(\tilde{x})z_l(\tilde{x}; L))\ldots))\ldots)). \quad (2)$$

Программа Pr вычисляет n-местную булеву функцию f, если $\mathrm{Pr}(\tilde{x}) = f(\tilde{x})$ для любого $\tilde{x}$ из $\{0,1\}^n$.

Всюду далее будем считать, что операторы условной остановки абсолютно надежны, а все вычислительные операторы базиса B независимо друг от друга с вероятностью ε $(\varepsilon \in (0, 1/2))$ подвержены инверсным неисправностям на выходах. Поскольку оператор условной остановки абсолютно надежен, он срабатывает, когда на его вход поступает единица. Инверсные неисправности на выходах вычислительных операторов характеризуются тем, что в исправном состоянии вычислительный оператор реализует приписанную ему функцию φ, а в неисправном – функцию $\overline{\varphi}$.

Программа Pr реализует булеву функцию $f\left(x_1, \ldots, x_n\right)$, если она реализует ее при отсутствии неисправностей.

Ненадежностью $N\left(\mathrm{Pr}\right)$ программы Pr назовем максимальную вероятность ошибки на выходе программы Pr при всевозможных входных наборах.

Обозначим $N_\varepsilon(f) = \inf N(\mathrm{Pr})$, где инфимум берется по всем программам Pr, реализующим булеву функцию $f(\tilde{x})$.

Программа A, реализующая функцию f, называется асимптотически оптимальной по надежности, если $N(A) \sim N_\varepsilon(f)$ при $\varepsilon \to 0$, т.е. $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \dfrac{N_\varepsilon(f)}{N(A)} = 1$.

Чтобы использовать в данной работе известные результаты для схем из функциональных элементов, введем понятия ненадежности схемы и асимптотически оптимальной схемы.

Ненадежностью $N\left(S\right)$ схемы S из функциональных элементов, подверженных инверсным неисправностям на выходах, назовем максимальную вероятность ошибки на выходе схемы S при всевозможных входных наборах схемы S. Обозначим $N_\varepsilon(f) = \inf N(S)$, где инфимум берется по всем схемам S из ненадежных элементов, реализующим булеву функцию f.

Схема A из ненадежных элементов, реализующая функцию f, называется асимптотически оптимальной по надежности, если $N(A) \sim N_\varepsilon(f)$ при $\varepsilon \to 0$, т.е. $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \dfrac{N_\varepsilon(f)}{N(A)} = 1$.

Теорема 1 [2]. *В произвольном полном конечном базисе B любую булеву функцию f можно реализовать схемой S, ненадежность которой* $P(S) \le 5\varepsilon + 182\varepsilon^2$ *при* $\varepsilon \in (0, 1/960]$.

Константа 5 в оценке ненадежности из теоремы 1 в некоторых базисах, например, $B = \{x_1 \,\&\, x_2, \bar{x}_1\}$ и $B = \{x_1 \vee x_2, \bar{x}_1\}$, не может быть понижена [4].

О надежности неветвящихся программ в базисах, содержащих функцию $x_1 \vee x_2$

Пусть полный конечный базис B содержит $x_1 \vee x_2$. Для неветвящихся программ с оператором условной остановки справедливы лемма 1 и теорема 2.

Лемма 1. *Функцию голосования* $g(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 \vee x_2x_3 \vee x_1x_3$ *можно реализовать неветвящейся программой* Pr_g (рис. 1), *ненадежность которой* $N(\mathrm{Pr}_g) = \varepsilon$.

$$\begin{aligned} \mathrm{Pr}_g:\ & z_1 = x_2 \vee x_3 \\ & \mathrm{stop}(x_1) \\ & z_2 = x_2 \\ & \mathrm{stop}(x_3) \\ & z_3 = x_3 \end{aligned}$$

Рис. 1

Доказательство. По формуле (2) найдем функцию, которую вычисляет программа Pr_g (рис. 1):

$$\mathrm{Pr}_g(x_1, x_2, x_3) = x_1(x_2 \vee x_3) \vee \bar{x}_1(x_3x_2 \vee \bar{x}_3x_3) = x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee \bar{x}_1x_2x_3 =$$

$$= x_2(x_1 \vee \bar{x}_1x_3) \vee x_1x_3 = x_2(x_1 \vee x_3) \vee x_1x_3 = x_1x_2 \vee x_2x_3 \vee x_1x_3.$$

Оценим вероятность ошибки программы Pr_g на всевозможных входных наборах $\breve{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$.

Отметим, что на наборах (0, 0, 0), (0, 0, 1), (0, 1, 0) и (0, 1, 1) вероятность ошибки равна 0, так как stop-оператор $\mathrm{stop}(x_1)$ на этих наборах не срабатывает, а следовательно, ошибка функционального оператора $z_1 = x_2 \vee x_3$ не влияет на результат работы программы Pr_g.

Пусть входной набор $\breve{\alpha}$ равен одному из наборов (1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 1). Обозначим $P_0(\mathrm{Pr}_g, \breve{\alpha})$ вероятность ошибки программы Pr_g:

$$P_0(\mathrm{Pr}_g, \breve{\alpha}) = \varepsilon.$$

Пусть входной набор $\breve{\alpha} = (1, 0, 0)$. Обозначим $P_1(\mathrm{Pr}_g, \breve{\alpha})$ вероятность ошибки программы Pr_g:

$$P_1(\mathrm{Pr}_g, \breve{\alpha}) = \varepsilon.$$

Таким образом, $N(\mathrm{Pr}_g) = \varepsilon$.

Лемма 1 доказана.

Программу Pr_g (рис. 1) будем использовать для повышения надежности программ, реализующих произвольные функции.

Теорема 2. *В полном конечном базисе B, содержащем* $x_1 \vee x_2$*, при любом* $n \in N$ *любую функцию* $f(x_1, ..., x_n)$ *можно реализовать такой программой* Pr_f^*, *что при всех* $\varepsilon \in (0, 1/960]$ *справедливо неравенство* $N(\mathrm{Pr}_f^*) \le \varepsilon + 81\varepsilon^2$.

Доказательство. Пусть полный конечный базис *B* содержит функцию $x_1 \vee x_2$. Пусть $f(x_1, ..., x_n)$ – произвольная булева функция, $n \in N$. По теореме 1 ее можно реализовать схемой *S*, которая при $\varepsilon \in (0, 1/960]$ функционирует с ненадежностью $P(S) \le 5\varepsilon + 182\varepsilon^2$. Используя схему *S*, построим для *f* неветвящуюся программу с абсолютно надежными операторами условной остановки Pr_f^* (рис. 2).

Pr_f^*:

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l} y_1 = f\,[S]\\ y_2 = f\,[S]\\ y_3 = f\,[S]\\ z_1 = y_2 \vee y_3\\ \mathrm{stop}(y_1)\end{array}\right\}\mathrm{Pr}_f^{*\mathrm{I}}\\ z_2 = y_2\\ \mathrm{stop}(y_3)\end{array}\right\}\mathrm{Pr}_f^{*\mathrm{II}}\\ z_3 = y_3\end{array}\right\}\mathrm{Pr}_f^{*\mathrm{III}}$$

Рис. 2

Программа Pr_f^* имеет один выход. Выделим в ней три подпрограммы, $\mathrm{Pr}_f^{*\mathrm{I}}$, $\mathrm{Pr}_f^{*\mathrm{II}}$ и $\mathrm{Pr}_f^{*\mathrm{III}}$ (см. рис. 2). Если срабатывает первый stop-оператор $\mathrm{stop}(y_1)$, то выполнение программы прекращается и на выход программы идет значение выходной переменной z_1, если срабатывает второй stop-оператор $\mathrm{stop}(y_3)$ – значение выходной переменной z_2. При этом результат работы программы совпадает с результатом работ соответственно первой $\mathrm{Pr}_f^{*\mathrm{I}}$ или второй $\mathrm{Pr}_f^{*\mathrm{II}}$ подпрограмм. Если же операторы условной остановки не срабатывают, выполнение программы продолжается и на выход идет значение выходной переменной z_3. В этом случае результат работы программы совпадает с результатом работы третьей подпрограммы $\mathrm{Pr}_f^{*\mathrm{III}}$.

Вычислим и оценим вероятности ошибок на выходе программы Pr_f^*.

Пусть входной набор $\tilde{a}$ такой, что $f(\tilde{a})=0$. Обозначим $P_1(S,\tilde{a})$ вероятность ошибки схемы S на наборе $\tilde{a}$. Тогда

$$P_1(\mathrm{Pr}_f^*,\tilde{a})=(1-P_1(S,\tilde{a}))^3\cdot 0+P_1(S,\tilde{a})(1-P_1(S,\tilde{a}))^2\cdot\varepsilon+$$

$$+(1-P_1(S,\tilde{a}))P_1(S,\tilde{a})(1-P_1(S,\tilde{a}))\cdot 0+(1-P_1(S,\tilde{a}))^2P_1(S,\tilde{a})\cdot 0+$$

$$+P_1^2(S,\tilde{a})(1-P_1(S,\tilde{a}))\cdot(1-\varepsilon)+P_1(S,\tilde{a})(1-P_1(S,\tilde{a}))P_1(S,\tilde{a})\cdot(1-\varepsilon)+$$

$$+(1-P_1(S,\tilde{a}))P_1^2(S,\tilde{a})\cdot 1+P_1^3(S,\tilde{a})\cdot(1-\varepsilon)\le P(S)\varepsilon+3P^2(S).$$

Поскольку $P(S)\le 5\varepsilon+182\varepsilon^2$ и $\varepsilon\in(0,1/960]$, получаем неравенство

$$P_1(Pr_f^*,\tilde{a})\le 86\varepsilon^2. \qquad (3)$$

Пусть набор $\tilde{a}$ такой, что $f(\tilde{a})=1$. Обозначим $P_0(S,\tilde{a})$ вероятность ошибки схемы S на наборе $\tilde{a}$. Тогда

$$P_0(\mathrm{Pr}_f^*,\tilde{a})=(1-P_0(S,\tilde{a}))^3\cdot\varepsilon+P_0(S,\tilde{a})(1-P_0(S,\tilde{a}))^2\cdot 0+$$

$$+(1-P_0(S,\tilde{a}))P_0(S,\tilde{a})(1-P_0(S,\tilde{a}))\cdot\varepsilon+(1-P_0(S,\tilde{a}))^2P_0(S,\tilde{a})\cdot\varepsilon+$$

$$+P_0^2(S,\tilde{a})(1-P_0(S,\tilde{a}))\cdot 1+P_0(S,\tilde{a})(1-P_0(S,\tilde{a}))P_0(S,\tilde{a})\cdot 1+$$

$$+(1-P_0(S,\tilde{a}))P_0^2(S,\tilde{a})\cdot(1-\varepsilon)+P_0^3(S,\tilde{a})\cdot 1\le\varepsilon+3P^2(S).$$

Поскольку $P(S)\le 5\varepsilon+182\varepsilon^2$ и $\varepsilon\in(0,1/960]$, получаем неравенство

$$P_0(\mathrm{Pr}_f^*,\tilde{a})\le\varepsilon+81\varepsilon^2. \qquad (4)$$

Из неравенств (3) и (4) следует, что ненадежность программы $N(\mathrm{Pr}_f^*)$ удовлетворяет неравенству $N(\mathrm{Pr}_f^*)\le\varepsilon+81\varepsilon^2$.

Теорема 2 доказана.

О надежности неветвящихся программ в базисах, содержащих функцию $\bar{x}_1\vee x_2$

Пусть полный конечный базис B содержит функцию $\bar{x}_1\vee x_2$. Для неветвящихся программ с оператором условной остановки справедливы лемма 2 и теорема 3.

Лемма 2. *Функцию* $g_1(x_1,x_2,x_3)=\bar{x}_1x_2\vee x_2x_3\vee\bar{x}_1x_3$ *можно реализовать неветвящейся программой* Pr_{g_1} (рис. 3), *ненадежность которой* $N(\mathrm{Pr}_{g_1})=\varepsilon$.

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Pr}_{g_1}:\ & z_1 = \bar{x}_1 \vee x_3 \\
& \mathrm{stop}(x_2) \\
& z_2 = x_2 \\
& \mathrm{stop}(x_1) \\
& z_3 = x_3
\end{aligned}
$$

Рис. 3

Доказательство. По формуле (2) найдем функцию, которую вычисляет программа Pr_{g_1} (рис. 3):

$$\mathrm{Pr}_{g_1}(x_1, x_2, x_3) = x_2(\bar{x}_1 \vee x_3) \vee \bar{x}_2(x_1 x_2 \vee \bar{x}_1 x_3) = \bar{x}_1 x_2 \vee x_2 x_3 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 =$$

$$= \bar{x}_1(x_2 \vee \bar{x}_2 x_3) \vee x_2 x_3 = \bar{x}_1(x_2 \vee x_3) \vee x_2 x_3 = \bar{x}_1 x_2 \vee x_2 x_3 \vee \bar{x}_1 x_3.$$

Оценим вероятность ошибки программы Pr_{g_1} на всевозможных входных наборах $\breve{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$.

Отметим, что на наборах (0, 0, 0), (0, 0, 1), (1, 0, 0) и (1, 0, 1) вероятность ошибки равна 0, так как stop-оператор $\mathrm{stop}(x_2)$ на этих наборах не срабатывает, а следовательно, ошибка функционального оператора $z_1 = \bar{x}_1 \vee x_3$ не влияет на результат работы программы Pr_{g_1}.

Пусть входной набор $\breve{\alpha}$ равен одному из наборов (0, 1, 1), (0, 1, 0), (1, 1, 1). Обозначим $P_0(\mathrm{Pr}_{g_1}, \breve{\alpha})$ вероятность ошибки программы Pr_{g_1}:

$$P_0(\mathrm{Pr}_{g_1}, \breve{\alpha}) = \varepsilon.$$

Пусть входной набор $\breve{\alpha} = (1,1,0)$. Обозначим $P_1(\mathrm{Pr}_{g_1}, \breve{\alpha})$ вероятность ошибки программы Pr_{g_1}:

$$P_1(\mathrm{Pr}_{g_1}, \tilde{\alpha}) = \varepsilon.$$

Таким образом, $N(\mathrm{Pr}_{g_1}) = \varepsilon$.

Лемма 2 доказана.

Программу Pr_{g_1} (рис. 3) будем использовать для повышения надежности программ, реализующих произвольные булевы функции.

Теорема 3. *В полном конечном базисе B, содержащем $\bar{x}_1 \vee x_2$, при любом $n \in N$ любую функцию $f(x_1, ..., x_n)$ можно реализовать такой программой Pr_f^{**}, что при всех $\varepsilon \in (0, 1/960]$ справедливо неравенство $N(\mathrm{Pr}_f^{**}) \le \varepsilon + 81\varepsilon^2$.*

Доказательство. Пусть полный конечный базис B содержит функцию $\bar{x}_1 \vee x_2$. Пусть $f(x_1, ..., x_n)$ – произвольная булева функция, $n \in N$. По теореме 1 функции $\bar{f}$ и f можно реализовать схемами S_1 и S_2 соответственно, которые при $\varepsilon \in (0, 1/960]$ функционируют с ненадежностью, не больше

$5\varepsilon + 182\varepsilon^2$. Обозначим $P(S_1)$ и $P(S_2)$ ненадежности схем S_1 и S_2 соответственно. Пусть $P = \max\{P(S_1), P(S_2)\}$. Тогда $P \le 5\varepsilon + 182\varepsilon^2$. Используя схемы S_1 и S_2, построим для f неветвящуюся программу Pr_f^{**} (см. рис. 4).

Pr_f^{**}:

$y_1 = \overline{f}\,[S_1]$
$y_2 = f\,[S_2]$
$y_3 = f\,[S_2]$
$z_1 = \overline{y}_1 \vee y_3$
$\mathrm{stop}(y_2)$
$z_2 = y_2$
$\mathrm{stop}(y_1)$
$z_3 = y_3$

Рис. 4

Вычислим и оценим вероятности ошибок на выходе программы Pr_f^{**}.

Пусть входной набор $\tilde{a}$ такой, что $f(\tilde{a}) = 0$. Обозначим $P_0(S_1, \tilde{a})$ и $P_1(S_2, \tilde{a})$ вероятности ошибок схем S_1 и S_2 на входном наборе $\tilde{a}$. Ясно, что $P_0(S_1, \tilde{a}) \le P(S_1)$, $P_1(S_2, \tilde{a}) \le P(S_2)$. Тогда

$$P_1(\mathrm{Pr}_f^{**}, \tilde{a}) = (1 - P_0(S_1, \tilde{a}))(1 - P_1(S_2, \tilde{a}))^2 \cdot 0 + P_0(S_1, \tilde{a})(1 - P_1(S_2, \tilde{a}))^2 \cdot 0 +$$
$$+(1 - P_0(S_1, \tilde{a}))P_1(S_2, \tilde{a})(1 - P_1(S_2, \tilde{a})) \cdot \varepsilon + (1 - P_0(S_1, \tilde{a}))(1 - P_1(S_2, \tilde{a}))P_1(S_2, \tilde{a}) \cdot 0 +$$
$$+P_0(S_1, \tilde{a})P_1(S_2, \tilde{a})(1 - P_1(S_2, \tilde{a})) \cdot (1 - \varepsilon) + P_0(S_1, \tilde{a})(1 - P_1(S_2, \tilde{a}))P_1(S_2, \tilde{a}) \cdot 1 +$$
$$+(1 - P_0(S_1, \tilde{a}))P_1^2(S_2, \tilde{a}) \cdot (1 - \varepsilon) + P_0(S_1, \tilde{a})P_1^2(S_2, \tilde{a}) \cdot (1 - \varepsilon) \le P\varepsilon + 3P^2.$$

Поскольку $P \le 5\varepsilon + 182\varepsilon^2$ и $\varepsilon \in (0, 1/960]$, получаем неравенство

$$P_1(\mathrm{Pr}_f^{**}, \tilde{a}) \le 86\varepsilon^2. \quad (5)$$

Пусть входной набор $\tilde{a}$ такой, что $f(\tilde{a}) = 1$. Обозначим $P_1(S_1, \tilde{a})$ и $P_0(S_2, \tilde{a})$ вероятности ошибок схем S_1 и S_2 на входном наборе $\tilde{a}$. Ясно, что $P_1(S_1, \tilde{a}) \le P(S_1)$, $P_0(S_2, \tilde{a}) \le P(S_2)$. Тогда

$$P_0(\mathrm{Pr}_f^{**}, \tilde{a}) = (1 - P_1(S_1, \tilde{a}))(1 - P_0(S_2, \tilde{a}))^2 \cdot \varepsilon + P_1(S_1, \tilde{a})(1 - P_0(S_2, \tilde{a}))^2 \cdot \varepsilon +$$
$$(1 - P_1(S_1, \tilde{a}))P_0(S_2, \tilde{a})(1 - P_0(S_2, \tilde{a})) \cdot 0 + (1 - P_1(S_1, \tilde{a}))(1 - P_0(S_2, \tilde{a})) \times$$
$$\times P_0(S_2, \tilde{a}) \cdot \varepsilon + P_1(S_1, \tilde{a})P_0(S_2, \tilde{a})(1 - P_0(S_2, \tilde{a})) \cdot 1 + P_1(S_1, \tilde{a})(1 - P_0(S_2, \tilde{a})) \times$$
$$\times P_0(S_2, \tilde{a}) \cdot (1 - \varepsilon) + (1 - P_1(S_1, \tilde{a}))P_0^2(S_2, \tilde{a}) \cdot 1 + P_1(S_1, \tilde{a})P_0^2(S_2, \tilde{a}) \cdot 1 \le \varepsilon + 3P^2.$$

Поскольку $P \le 5\varepsilon + 182\varepsilon^2$ и $\varepsilon \in (0, 1/960]$, получаем неравенство

$$P_0(\mathrm{Pr}_f^{**}, \tilde{a}) \le \varepsilon + 81\varepsilon^2. \tag{6}$$

Из неравенств (5) и (6) следует, что ненадежность программы $N(\mathrm{Pr}_f^{**})$ удовлетворяет неравенству $N(\mathrm{Pr}_f^{**}) \le \varepsilon + 81\varepsilon^2$.

Теорема 3 доказана.

Замечание 1. Теорема 3 справедлива для полных конечных базисов, содержащих $x_1 \vee \bar{x}_2$, поскольку функция $x_1 \vee \bar{x}_2$ получается из функции $\bar{x}_1 \vee x_2$ переименованием переменных x_1 на x_2 и x_2 на x_1.

О надежности неветвящихся программ в базисах, содержащих функцию $\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2$

Пусть полный конечный базис B содержит $\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2$. Для неветвящихся программ с оператором условной остановкой справедливы лемма 3 и теорема 4.

Лемма 3. *Функцию* $g_2(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_1 x_2 \vee x_2 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_3$ *можно реализовать неветвящейся программой* Pr_{g_2}, *приведенной на рис. 5, ненадежность которой* $N(\mathrm{Pr}_{g_2}) = \varepsilon$.

Pr_{g_2} :

$z_1 = \bar{x}_1 \vee \bar{x}_3$

$\mathrm{stop}(x_2)$

$z_2 = x_2$

$\mathrm{stop}(x_1)$

$z_3 = \bar{x}_3 \vee \bar{x}_3$

Рис. 5

Доказательство. По формуле (2) найдем функцию, которую вычисляет программа Pr_{g_2} (рис. 5):

$$\mathrm{Pr}_{g_2}(x_1, x_2, x_3) = (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_3)x_2 \vee \bar{x}_2(x_2 x_1 \vee \bar{x}_1(\bar{x}_3 \vee \bar{x}_3)) = \bar{x}_1 x_2 \vee x_2 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 =$$

$$= \bar{x}_1(x_2 \vee \bar{x}_2 \bar{x}_3) \vee x_2 \bar{x}_3 = \bar{x}_1(x_2 \vee \bar{x}_3) \vee x_2 \bar{x}_3 = \bar{x}_1 x_2 \vee x_2 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_3.$$

Отметим, что на наборах (1, 0, 0) и (1, 0, 1) вероятность ошибки равна 0, так как stop-оператор $\mathrm{stop}(x_2)$ на этих наборах не срабатывает, но срабатывает stop-оператор $\mathrm{stop}(x_1)$, а следовательно, ошибка функциональных операторов $z_1 = \bar{x}_1 \vee \bar{x}_3$ и $z_3 = \bar{x}_3 \vee \bar{x}_3$ не влияет на результат работы программы Pr_{g_2}.

Оценим вероятность ошибки программы Pr_{g_2} на всевозможных входных наборах $\breve{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$.

Пусть входной набор $\breve{\alpha}=(0,0,0)$. Обозначим $P_0(\mathrm{Pr}_{g_2},\breve{\alpha})$ вероятность ошибки программы Pr_{g_2}:

$$P_0(\mathrm{Pr}_{g_2},\breve{\alpha})=\varepsilon.$$

Пусть входной набор $\breve{\alpha}$ равен одному из наборов (0, 1, 0), (0, 1, 1) или (1, 1, 0):

$$P_0(\mathrm{Pr}_{g_2},\breve{\alpha})=\varepsilon.$$

Пусть входной набор $\breve{\alpha}=(0,0,1)$. Обозначим $P_1(\mathrm{Pr}_{g_2},\breve{\alpha})$ вероятность ошибки программы Pr_{g_2}:

$$P_1(\mathrm{Pr}_{g_2},\breve{\alpha})=\varepsilon.$$

Пусть входной набор $\breve{\alpha}=(1,1,1)$:

$$P_1(\mathrm{Pr}_{g_2},\breve{\alpha})=\varepsilon.$$

Таким образом, $N(\mathrm{Pr}_{g_2})=\varepsilon$.

Лемма 2 доказана.

Программу Pr_{g_2} (рис. 5) будем использовать для повышения надежности программ, реализующих произвольные булевы функции.

Теорема 4. *В полном конечном базисе B, содержащем* $\bar{x}_1\vee\bar{x}_2$, *при любом* $n\in N$ *любую функцию* $f(x_1,\dots,x_n)$ *можно реализовать такой программой* Pr_f^{***}, *что при всех* $\varepsilon\in(0,1/960]$ *справедливо неравенство* $N(\mathrm{Pr}_f^{***})\le\varepsilon+81\varepsilon^2$.

Доказательство. Пусть полный конечный базис *B* содержит функцию $\bar{x}_1\vee\bar{x}_2$. Пусть $f(x_1,\dots,x_n)$ – произвольная булева функция, $n\in N$. По теореме 1 функции $\bar{f}$ и f можно реализовать схемами S_1 и S_2 соответственно, которые при $\varepsilon\in(0,1/960]$ функционируют с ненадежностью, не больше $5\varepsilon+182\varepsilon^2$. Обозначим $P(S_1)$ и $P(S_2)$ ненадежности схем S_1 и S_2 соответственно. Пусть $P=\max\{P(S_1),P(S_2)\}$. Тогда $P\le5\varepsilon+182\varepsilon^2$. Используя схемы S_1 и S_2, построим для *f* неветвящуюся программу Pr_f^{***} (рис. 6).

Вычислим и оценим вероятности ошибок на выходе программы Pr_f^{***}.

Пусть входной набор $\tilde{a}$ такой, что $f(\tilde{a})=0$. Обозначим $P_0(S_1,\tilde{a})$ и $P_1(S_2,\tilde{a})$ вероятности ошибок схем S_1 и S_2 на входном наборе $\tilde{a}$.

Ясно, что $P_0(S_1,\tilde{a})\le P(S_1)$, $P_1(S_2,\tilde{a})\le P(S_2)$. Тогда

$$P_1(\mathrm{Pr}_f^{***},\tilde{a})=(1-P_0(S_1,\tilde{a}))^2(1-P_1(S_2,\tilde{a}))\cdot0+P_0(S_1,\tilde{a})(1-P_1(S_2,\tilde{a}))\times$$
$$\times(1-P_0(S_1,\tilde{a}))\cdot\varepsilon+(1-P_0(S_1,\tilde{a}))P_1(S_2,\tilde{a})(1-P_0(S_1,\tilde{a}))\cdot\varepsilon+$$
$$+(1-P_0(S_1,\tilde{a}))(1-P_1(S_2,\tilde{a}))P_0(S_1,\tilde{a})\cdot0+P_0(S_1,\tilde{a})P_1(S_2,\tilde{a})\times$$

$$\times(1-P_0(S_1,\tilde a))\cdot(1-\varepsilon)+P_0(S_1,\tilde a)(1-P_1(S_2,\tilde a))P_0(S_1,\tilde a)\cdot(1-\varepsilon)+$$

$$+(1-P_0(S_1,\tilde a))P_1(S_2,\tilde a)P_0(S_1,\tilde a)\cdot(1-\varepsilon)+P_0^2(S_1,\tilde a)P_1(S_2,\tilde a)\cdot(1-\varepsilon)\le$$

$$\le 2P(S)\varepsilon+3P^2(S).$$

Pr_f^{***} :

$y_1=\overline{f}\,[S_1]$
$y_2=f\,[S_2]$
$y_3=\overline{f}\,[S_1]$
$z_1=\overline{y}_1\vee\overline{y}_3$
$\mathrm{stop}(y_2)$
$z_2=y_2$
$\mathrm{stop}(y_1)$
$z_3=\overline{y}_3\vee\overline{y}_3$

Рис. 6

Поскольку $P(S)\le 5\varepsilon+182\varepsilon^2$ и $\varepsilon\in(0,1/960]$, получаем неравенство

$$P_1(\mathrm{Pr}_f^{***},\tilde a)\le 90\varepsilon^2. \qquad (7)$$

Пусть входной набор $\tilde a$ такой, что $f(\tilde a)=1$. Обозначим $P_1(S_1,\tilde a)$ и $P_0(S_2,\tilde a)$ вероятности ошибок схем S_1 и S_2 на входном наборе $\tilde a$. Ясно, что $P_1(S_1,\tilde a)\le P(S_1)$, $P_0(S_2,\tilde a)\le P(S_2)$. Тогда

$$P_0(\mathrm{Pr}_f^{***},\tilde a)=(1-P_1(S_1,\tilde a))^2(1-P_0(S_2,\tilde a))\cdot\varepsilon+P_1(S_1,\tilde a)(1-P_0(S_2,\tilde a))\times$$

$$\times(1-P_1(S_1,\tilde a))\cdot\varepsilon+(1-P_1(S_1,\tilde a))P_0(S_2,\tilde a)(1-P_1(S_1,\tilde a))\cdot\varepsilon+$$

$$+(1-P_1(S_1,\tilde a))(1-P_0(S_2,\tilde a))P_1(S_1,\tilde a)\cdot\varepsilon+P_1(S_1,\tilde a)P_0(S_2,\tilde a)(1-P_1(S_1,\tilde a))\cdot 1+$$

$$+P_1(S_1,\tilde a)(1-P_0(S_2,\tilde a))P_1(S_1,\tilde a)\cdot(1-\varepsilon)+(1-P_1(S_1,\tilde a))P_0(S_2,\tilde a)\times$$

$$\times P_1(S_1,\tilde a)\cdot(1-\varepsilon)+P_1^2(S_1,\tilde a)P_0(S_2,\tilde a)\cdot 1\le\varepsilon+3P^2(S).$$

Поскольку $P(S)\le 5\varepsilon+182\varepsilon^2$ и $\varepsilon\in(0,1/960]$, получаем неравенство

$$P_0(\mathrm{Pr}_f^{***},\tilde a)\le\varepsilon+81\varepsilon^2. \qquad (8)$$

Из неравенств (7) и (8) следует, что ненадежность программы $N(\mathrm{Pr}_f^{***})$ удовлетворяет неравенству $N(\mathrm{Pr}_f^{***})\le\varepsilon+81\varepsilon^2$.

Теорема 4 доказана.

Заключение

Из теорем 2, 3 и 4, учитывая замечание 1, следует теорема 5.

Теорема 5. *В полном конечном базисе B, содержащем функцию вида* $x_1^{a_1} \vee x_2^{a_2}, a_1, a_2 \in \{0,1\}$, *любую булеву функцию* f *можно реализовать такой программой* Pr_f, *что при всех* $\varepsilon \in (0, 1/960]$ *справедливо неравенство* $N(\mathrm{Pr}_f) \le \varepsilon + 81\varepsilon^2$.

Замечание 2. Утверждение теоремы 5 верно, если полный конечный базис содержит некоторую функцию вида $x_1^{a_1} \vee x_2^{a_2} \vee ... \vee x_k^{a_k}$ ($k \ge 3$, $a_i \in \{0,1\}, i \in \{1,...,k\}$), поскольку, отождествляя некоторые переменные, из нее можно получить функцию вида $x_1^{b_1} \vee x_2^{b_2}, b_1, b_2 \in \{0,1\}$.

Из теоремы 5 следует, что в полном конечном базисе, содержащем некоторую функцию вида $x_1^{a_1} \vee x_2^{a_2}, a_1, a_2 \in \{0,1\}$, любую булеву функцию f можно реализовать неветвящейся программой с ненадежностью, не больше $\varepsilon + 81\varepsilon^2$ при $\varepsilon \in (0, 1/960]$.

Сравним полученный результат с известными результатами [3] для схем из функциональных элементов.

Пусть B_3 – множество всех булевых функций, зависящих от трех переменных x_1, x_2, x_3, а полный базис $B \subseteq B_3$. Обозначим $G = G_1 \bigcup G_2 \bigcup G_3$, где

$$G_1 = \{x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} \vee x_1^{\sigma_1} x_3^{\sigma_3} \vee x_2^{\sigma_2} x_3^{\sigma_3} \mid \sigma_i \in \{0,1\}, i \in \{1,2,3\}\};$$

$$G_2 = \mathrm{Congr}\{x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} \oplus x_3^{\sigma_3} \mid \sigma_i \in \{0,1\}, i \in \{1,2,3\}\};$$

$$G_3 = \mathrm{Congr}\{x_1^{\sigma_1} x_2^{\overline{\sigma}_2} \vee x_2^{\sigma_2} x_3^{\sigma_3} \mid \sigma_i \in \{0,1\}, i \in \{1,2,3\}\}.$$

Известно [2], что если полный базис B содержит функцию $\varphi \in G$, в частности функцию голосования $g(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 \vee x_2 x_3 \vee x_1 x_3$, то любую функцию в этом базисе можно реализовать асимптотически оптимальной по надежности схемой из функциональных элементов, ненадежность которой асимптотически равна ε при $\varepsilon \to 0$. Если же полный базис $B \subseteq B_3 \setminus G$, то для почти всех функций ненадежность асимптотически оптимальных по надежности схем асимптотически не меньше 2ε при $\varepsilon \to 0$ [2].

Например, в базисе $\{\overline{x}_1(x_2 \vee x_3), x_1 \vee x_2, 1\}$ почти для всех булевых функций можно построить асимптотически оптимальные по надежности схемы с ненадежностью, асимптотически равной 2ε при $\varepsilon \to 0$ [3]. В базисе $B = \{x_1 \& x_2, x_1 \vee x_2, \overline{x}_1\}$ почти все булевы функции можно реализовать асимптотически оптимальными по надежности схемами, функционирующими с ненадежностью, асимптотически равной 3ε при $\varepsilon \to 0$ [3]. В базисе $B = \{\overline{x}_1 \vee x_2, \overline{x}_1\}$ почти все булевы функции можно реализовать асимптотически оптимальными по надежности схемами, функционирующими с ненадежностью, асимптотически равной 4ε при $\varepsilon \to 0$ [3]. Например, в базисе

$\{x_1 \vee x_2, \bar{x}_1\}$ почти все булевы функции можно реализовать асимптотически оптимальными по надежности схемами, функционирующими с ненадежностью, асимптотически равной 5ε при $\varepsilon \to 0$ [4].

Таким образом, в полном конечном базисе, содержащем некоторую функцию вида $x_1^{a_1} \vee x_2^{a_2}$, $a_1, a_2 \in \{0, 1\}$, любую булеву функцию можно реализовать неветвящейся программой, функционирующей с ненадежностью не больше $\varepsilon + 81\varepsilon^2$ при $\varepsilon \in (0, 1/960]$. В то время как асимптотически оптимальные по надежности схемы из функциональных элементов в различных полных базисах $B \subseteq B_3 \setminus G$, содержащих функции вида $x_1^{a_1} \vee x_2^{a_2}$, $a_1, a_2 \in \{0, 1\}$, имеют ненадежность, асимптотически равную $k_B \cdot \varepsilon$ при $\varepsilon \to 0$, константа k_B зависит от базиса B и $k_B \in \{2, 3, 4, 5\}$.

Список литературы

1. **Чашкин, А. В.** О среднем времени вычисления значений булевых функций / А. В. Чашкин // Дискретный анализ и исследование операций. – 1997. – Январь–март. – Т. 4. – № 1. – С. 60–78.
2. **Алехина, М. А.** О надежности схем в базисах, содержащих функции не более чем трех переменных / М. А. Алехина, А. В. Васин // Ученые записки Казанского государственного университета. – 2009. – Т. 151. – Кн. 2. – С. 25–35. – (Физико-математические науки).
3. **Васин, А. В.** Асимптотически оптимальные по надежности схемы в полных базисах из трехвходовых элементов : дис. … канд. физико-математических наук / Васин А. В. – Пенза, 2010. – 100 с.
4. **Васин, А. В.** Об асимптотически оптимальных схемах в базисе $\{x_1 \& x_2, \bar{x}_1\}$ / А. В. Васин // Дискретный анализ и исследование операций. – 2009. – Ноябрь–декабрь. – Т. 16. – № 6. – С. 12–22.

Грабовская Светлана Михайловна
ассистент, кафедра дискретной математики, Пензенский государственный университет

E-mail: swetazin@mail.ru

Grabovskaya Svetlana Mikhaylovna
Assistant, sub-department of discrete mathematics, Penza State University

УДК 519.718

Грабовская, С. М.

О надежности неветвящихся программ в базисе, содержащем функцию вида $x_1^{a_1} \vee x_2^{a_2}$ / С. М. Грабовская // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2010. – № 4 (16). – С. 26–38.